

戲說數學

許志農

國立台灣師範大學數學系

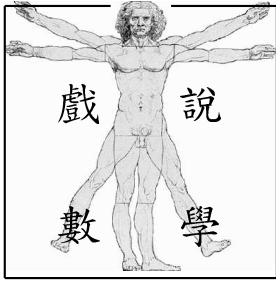
October 9, 2008



目 錄

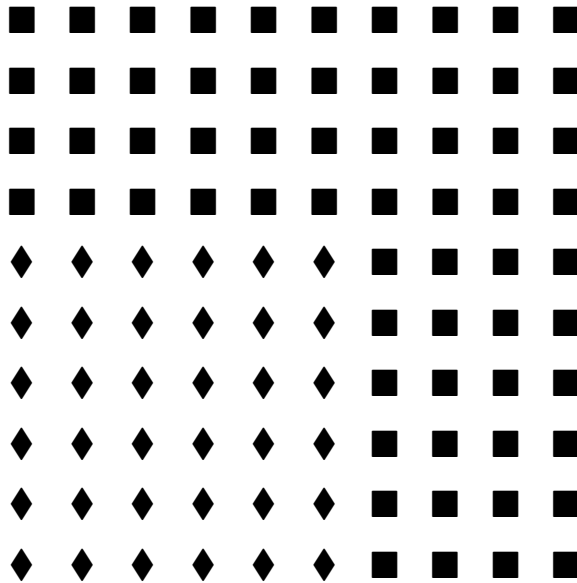
1	架設照相機的數學…直線與斜率的對話	2
2	華容道…關羽橫讓捉放曹操	4
3	三用瓶塞…三度空間的設計大師	6
4	燈火通明…節能減碳知多少	8

1 架設照相機的數學…直線與斜率的對話

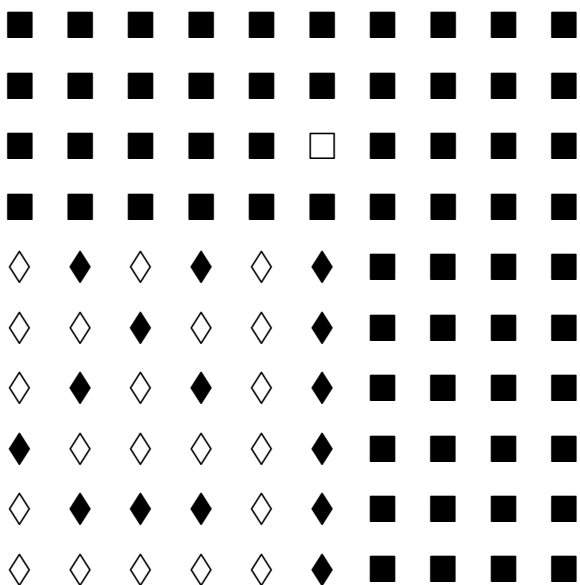


線條，特別是直線，是學習幾何所必須掌握的基本工具。在 319 槍擊案中，神探李昌鈺就是用雷射槍打出來的直線來追蹤槍擊手可能的開槍位置，這是三維空間與一條直線的對話。這裡讓我們來思考一道平面上的直線問題，大家都知道，當賦予直線的斜率時，平面上的直線就忽然間從幾何的國度躍入代數的領域中。幾何與代數一起考量才是瞭解直線的硬道理。

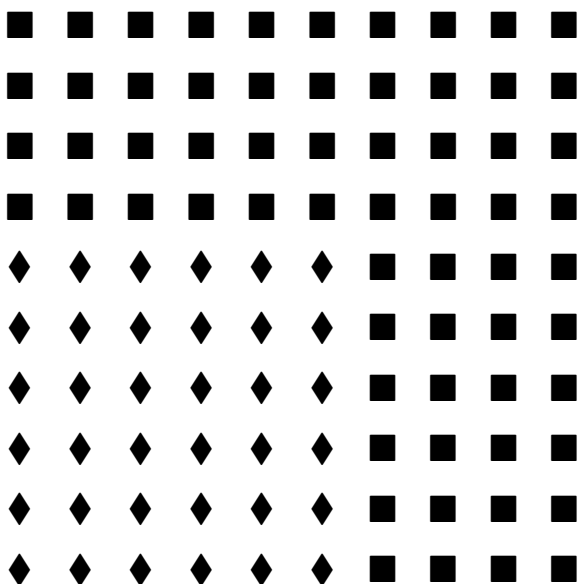
在下圖中，菱形與正方形方塊井然有序的排成陣列，其中任兩相鄰方塊的距離都相同：



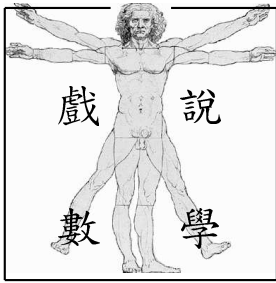
我們在一個正方形上架設照相機，當菱形方塊與此正方形方塊連線，且中間沒有其他方塊時，代表此菱形方塊可以被這台照相機監控。下圖中，在白色正方形方塊架設照相機，21 塊白色菱形是所有可以被監控的菱形：



1 在下圖中，至少需在幾處正方形上架設照相機才可以監控所有的 36 個菱形方塊：



2 華容道…關羽橫讓捉放曹操



華容道、孔明棋和魔術方塊被喻為世界三大不可思議的益智遊戲，其中華容道是一道滑板遊戲，出自三國演義中「關羽橫讓捉放曹操」的情節。事實上，華容道是中國古代的一個地名，相傳當年曹操在赤壁之戰後曾經敗走此地。由於當時的華容道是一片沼澤，所以曹操大軍要割草填地，不少士兵更慘被活埋，慘烈非常。

由於地理的變遷，到了明朝時，華容道已經由一個沼澤變成一片樹林。因此，當羅貫中撰寫《三國演義》時，亦根據當時的地理環境，寫關羽在樹林裡截擊曹操，這件事其實並沒有歷史根據。

📎 2 華容道棋盤為橫四格縱五格的盤面，曹操是占四格的正方形棋子；占兩格的有五虎將的關羽、張飛、趙雲、馬超與黃忠，其中只有關羽是橫兩格，其餘四將均為豎兩格；還有四個各占一格的兵（如下圖所示）。



在遊戲時，只能利用盤面上留下的兩個空格來移動棋子，只要想办法將曹操移到鄰接曹營上方的正中央的位置，即表示我們已成功讓曹操逃回曹營，遊戲至此於是結束。

可否僅透過滑板的移動，讓曹操回到曹營呢？

尋找最少的滑動步數讓曹操回到曹營，是華容道遊戲的另一種數學思維，在今日可以透過電腦的計算幫我們得到最少的滑動步數。

在電腦還沒有普及與成熟之前，滑板遊戲都是用木頭做的方格來操作。現在可以用電腦動畫模擬，而且效果與方便性都不輸給實體的木頭。關於華容道遊戲的源頭有另一種說法，大陸的姜長英在他所著《科學思維鍛煉與消遣》中說，「估計它的歷史不過有幾十年，從前人的筆記中沒有發現有華容道玩具的記載。」目前所見到關於華容道最早的文字記載就是姜長英在1949年出版的《科學消遣》。而且英國數學家哈代發明過一道與華容道極為相似的滑板遊戲…三角旗遊戲，在1907申請專利，1912得到批准，有人認為哈代的三角旗遊戲傳到中國，並加上本土的故事，成為本土化的華容道遊戲。

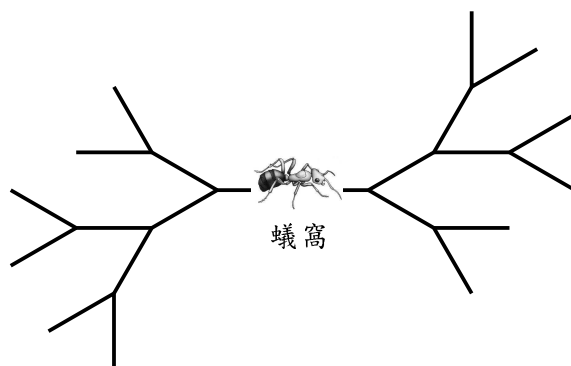
3 三用瓶塞…三度空間的設計大師



螞蟻只能看到平面（二維空間）的物事，只能在二維空間內做 360 度方向上的任意運動。雖然螞蟻只生活在平面上，但是科學家卻發現螞蟻能利用幾何原則尋找回窩的路，螞蟻天生俱有某種幾何的洞悟力。螞蟻的路線系統就像羅馬人的道路一樣…條條道路通羅馬；對螞蟻來

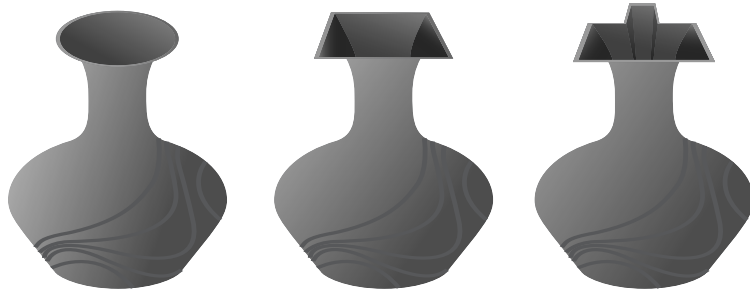
說…條條路線通蟻窩。

要了解螞蟻尋找方向的訣竅，可以假想有一個「Y」字母的交叉點，而一隻離開蟻窩的螞蟻從「Y」字母底下往上爬，碰到這樣一個叉路，發現有兩條以狹窄角度交叉的路線。相反地，回窩的螞蟻會碰到兩條叉路：一條的交叉角度較小，而另一條的角度大得多，角度較大的那一條路才是回家的路。也就是說，螞蟻的網路是由「Y」字來構成，而且較小的交叉角是 60 度左右，科學家稱它為「六十度法則」。如下圖所示，一隻螞蟻從蟻窩出來，朝東邊方向以六十度法則向外覓食，而這蟻窩的螞蟻構造了向東及向西兩個方向的覓食網：



雖然螞蟻的世界只有二維，但是牠們卻會使用二維的幾何原則來辨識方向。同樣的，身處三維空間的人們，是否也會妥善利用立體空間的幾何所帶來的好處呢？

📦 3 某人收集了三只瓶子，形狀如下圖所示



他們的瓶口形狀分別如圖 ①，圖 ② 及圖 ③。現在他想只做一個立體瓶塞，對三個瓶子都能適用。

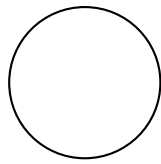


圖 ①

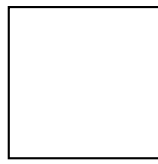


圖 ②

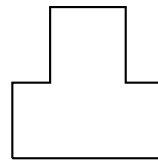
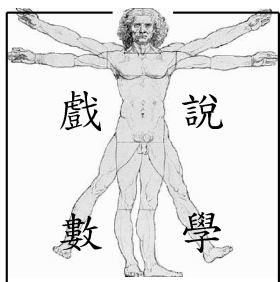


圖 ③

請你幫他設計一下。

拜我們生活的三維空間所賜，可以利用三個維度來設計一個一體適用的瓶塞。

4 燈火通明…節能減碳知多少

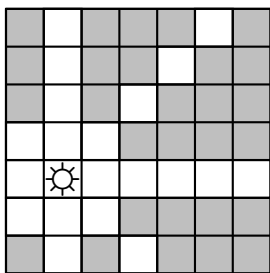


八后問題是源自於歐洲的獎學遊戲，主要在探討如何將西洋棋中的皇后擺在一個 8×8 的棋盤上，使 8 位皇后都互不攻擊的問題。皇后的攻擊方向為其所在格的垂直、水平及兩條對角線上的格子。據說獎學家高斯也對這問題有興趣過。相信許多人都曾玩過這個遊戲，也發現到其實擺法並只有一種。

事實上，八后問題的解(擺法)總共有 92 種，其中因為棋盤本身可以旋轉、鏡射等等，解的個數會因而增加。

這裡我們來討論一道與八后問題類似，但是要求皇后數量越少越好的棋盤問題：

4 在 7×7 的土地上，當在某一個格子內立一盞燈時，由這格子所畫出的水平線，鉛直線及兩條斜對角線所經過的格子，都會被照亮，其餘的格子無法被照亮，如下圖所示：



動手玩玩以下兩到問題：

- (1) 至少要立幾盞燈，才會照亮所有的格子，又該立在哪幾個格子上。
 - (2) 在所立的燈彼此不互相照射的條件下，至少要立幾盞燈，才會照亮所有的格子，又該立在哪幾個格子上。
-