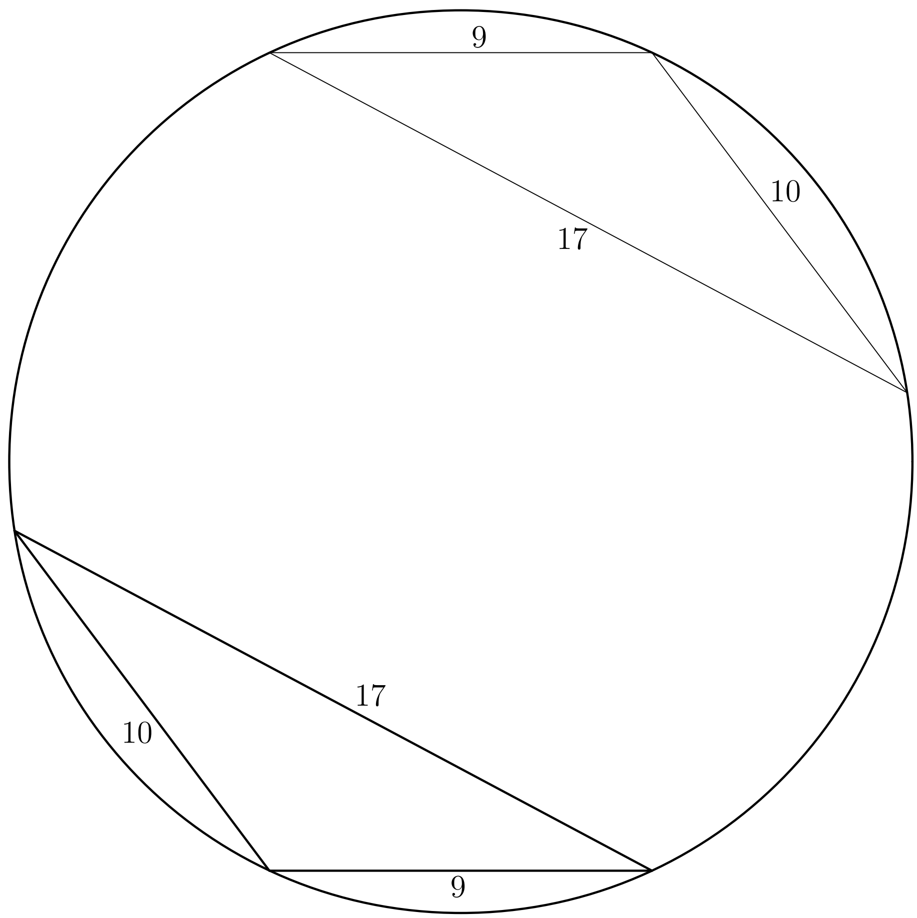
動 手 玩 數 學

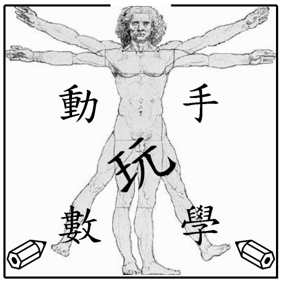
許 志 農

國立台灣師範大學數學系

October 8, 2008



三角形的邊長、面積、三內角的三
角函數值與外接圓半徑都是有理數



遊戲 **1**

☆☆

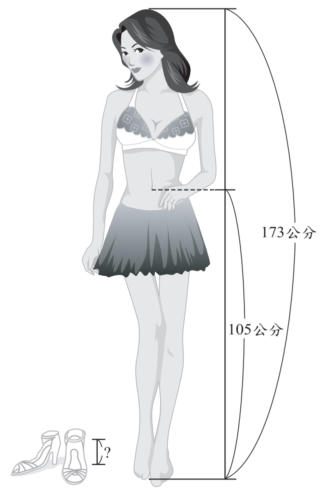
黃金比值 $\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 自古希臘以來，都扮演著重要的角色。例如，古希臘就利用黃金比值來建構正五邊形；文藝復興時期，達文西利用黃金比值來創作「蒙娜麗莎」的微笑。
達文西心中的完美女人是身材符合

$$\frac{\text{身高}}{\text{肚臍高度}}=\tau$$

的女人。

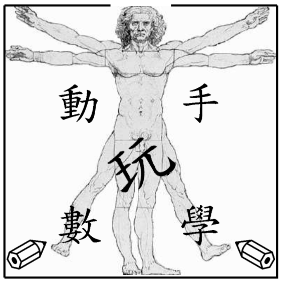
(1) 利用計算機或電腦求黃金比值 $\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 至小數點以下第三位（將第四位四捨五入）。

(2) 模特兒志玲身高 173 公分，肚臍高度 105 公分。請問志玲應該穿幾公分（取整數）高的高跟鞋，才會看起來最像完美女人。



先透過計算機或電腦估計黃金比值 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的近似值，再將此近似值代入條件裡，比較容易求得答案。

不妨量一下自己的比例離黃金比值多遠。芭蕾舞者在跳舞時，喜歡墊高腳底，女人喜歡穿高跟鞋的目的何在呢？



遊戲 **2**

☆

每一本現代的書都有國際標準書碼（或稱 ISBN 碼），國際標準書碼一共有十碼，前九碼是 9 個數字，稱為「訊息碼」；第十碼可能是數字或是 × 這個記號，稱為「檢查碼」。檢查碼是由訊息碼所決定的，將訊息碼的每個數字依序分別乘上 $1, 2, 3, \cdots, 9$，再將其總和除以 11，當所得的餘數是 10 時，規定檢查碼為 ×，餘數不為 10 時，就以此餘數當檢查碼。

例如《阿草的葫蘆》這本書的訊息碼為 957-990-882，又

$$1\times9+2\times5+3\times7+4\times9+5\times9+6\times0+7\times8+8\times8+9\times2=259$$

除以 11 所得的餘數為 6，故檢查碼為 6，此書完整的 ISBN 碼為 957-990-882-6，如下圖的標籤所示：

ISBN 957990882-6

00252

9 799579 908824

婷婷從電腦上查得《幾何原本十三卷》這本書的 ISBN 碼，並用噴墨印表機將它印下。由於不小心觸摸，使得其中的第三碼數字模糊了，但是其它的數字還很清楚，書碼如下所示

ISBN：04■-620-112-0

你能推得該書碼的第三碼應該是多少嗎？

數位時代，生活都與數字息息相關，舉凡到超市購物，條碼一刷，金額就顯現在螢幕上；圖書館借書，電子槍一讀，借書手續便告完成；身份證字號，銀行帳簿號碼，信用卡卡號，都與數字相關。究竟這些編碼是如何產生的呢？當你漏掉一碼或不小心將相鄰兩碼記反，編碼系統會發現嗎？根據調查，人們在填寫一連串的數字時，最容易犯的書寫錯誤為

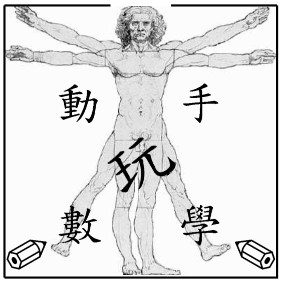
① 一位數字的寫錯。

② 落掉或多寫一位數字。

③ 將 37 寫成 73 之類。

為了修正這些人類常犯的錯誤，選擇一套好的編碼系統是需要的。

除了國際標準書碼（ISBN 碼）用來規範書本的類別外，還有一種對期刊分門別類的編碼，稱為國際標準期刊碼（簡稱 ISSN），它是國際間賦予期刊的一套統一編號。常見的期刊、雜誌、報紙、叢刊、年刊等大都用國際標準期刊碼來編碼。國際標準期刊碼由一組冠有“ ISSN”代號的八位數碼所組成，前七位稱為國際標準叢刊碼，第八位是檢查碼。例如，「台灣口腔醫學會雜誌」的國際標準期刊碼為 ISSN 1560-1587，「數學傳播」的國際標準期刊碼為 ISSN 1023-7526。你能找出國際標準期刊碼的編碼規則（提示：將這八個碼分別乘以不同的權數的和是 11 的倍數）？



遊戲 **3**

☆

紙張的尺寸分為國際標準組織尺寸和我國慣用尺寸兩種，而國內通用尺寸主要有「菊版紙」與「四六版紙」兩大類。若依面積來說，則最大的紙張稱為全開，其次有 2 開，3 開，4 開，⋯，128 開等的對應紙張。菊版紙的全開是 25×35（以英吋為單位）大小的紙張，而 2 開（有時稱對開），3 開，4 開，8 開，12 開，16 開， 20 開的大小列表如下圖所示。

規格／開數	英吋
全開	25×35
2 開	$25 \times 17\frac{1}{2}$
3 開	$25 \times 11\frac{2}{3}$
4 開	$12\frac{1}{2} \times 17\frac{1}{2}$
8 開	$12\frac{1}{2} \times 8\frac{3}{4}$
12 開	$8\frac{1}{3} \times 8\frac{3}{4}$
16 開	$6\frac{1}{4} \times 8\frac{3}{4}$
20 開	$6\frac{1}{4} \times 7$

利用正整數因數分解的知識，對各種菊版紙的尺寸給個數學公式，又某人訂做名片，經計算得知名片的面積是 12.5 平方英吋，若該名片是採菊版紙製作，則此人的名片是幾開菊版紙。

九十五學年度學科能力測驗《數學考科》多選題第 11 題就是這遊戲的最好提示：

將正整數 18 分解成兩個正整數的乘積有

$$1\times 18, 2\times 9, 3\times 6$$

三種，又 3×6 是這三種分解中，兩數的差最小的，我們稱 3×6 為 18 的最佳分解。當 $p\times q(p\leq q)$ 是正整數 n 的最佳分解時，我們規定函數 $F(n)=\frac{p}{q}$，例如 $F(18)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$。

下列有關函數 $F(n)$ 的敘述，何者正確？

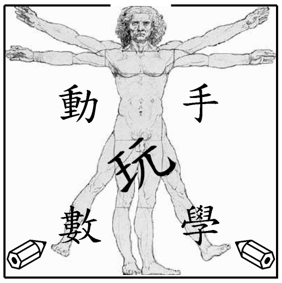
(1) $F(4)=1$。

(2) $F(24)=\frac{3}{8}$。

(3) $F(27)=\frac{1}{3}$。

(4) 若 n 是一個質數，則 $F(n)=\frac{1}{n}$。

(5) 若 n 是一個完全平方數，則 $F(n)=1$。



遊戲 4

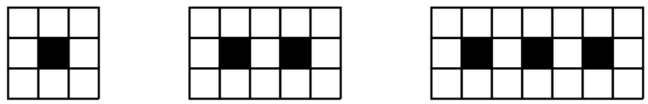
☆☆

伸出你的左手，從大姆指開始，如下圖所示那樣數數字 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots$：

(1) 求大拇指所數的第 n 個數為何？並描述大拇指所數的數之規律。

(2) 數到 999 時，你數在那個手指上？（以大拇指，食指，中指，無名指或小指回答）

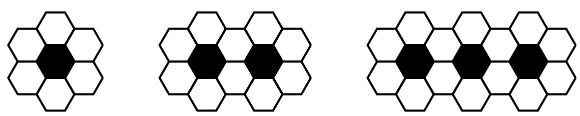
尋找規律或發現公式一直是數學活動中，很受重視的一環。例如九十五學年度學測第 G 題就是幾何規律的尋找問題：
用黑、白兩種顏色的正方形地磚依照如下的規律拼成若干圖形：



第 1 個　第 2 個　第 3 個

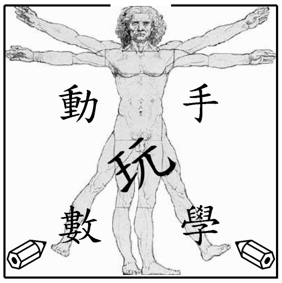
試問：拼第 95 個圖需用到 <u>㉗㉘㉙</u> 塊白色地磚。

又如下圖，求第 n 個圖的白色正六邊形個數，這也是一道尋找規律問題：



第 1 個　第 2 個　第 3 個

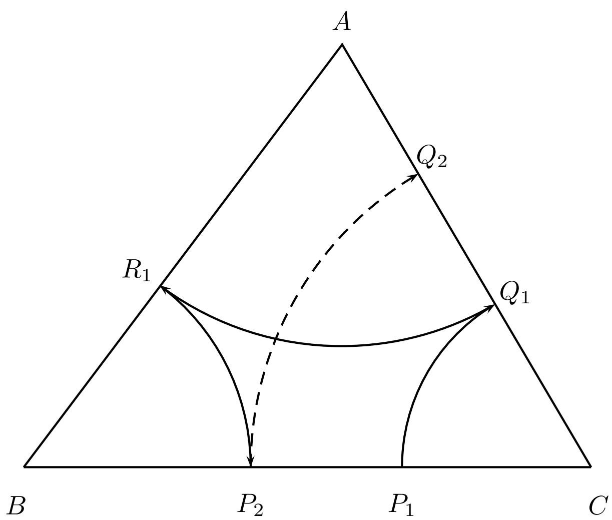
這道數數問題是取自第三屆《華羅庚金杯…少年數學邀請賽》的團體決賽口試試題。



遊戲 **5**

☆☆☆

在 $AB = 14, BC = 15, CA = 13$ 的三角形上，一隻螞蟻做圓弧形的運動，如下圖所示。螞蟻從 BC 邊上的一點 P_1 出發，繞著以 C 點為圓心，$\overline{CP_1}$ 為半徑的圓弧到達 CA 邊上的 Q_1 點；接著從 Q_1 點出發，繞著以 A 點為圓心，$\overline{AQ_1}$ 為半徑的圓弧到達 AB 邊上的 R_1 點；然後從 R_1 點出發，繞著以 B 點為圓心，$\overline{BR_1}$ 為半徑的圓弧到達 BC 邊上的 P_2 點，依這樣的規律進行下去，在 BC 邊上會產生點 $P_1, P_2, P_3, \cdots$。



(1) 若起始點 P_1 滿足 $\overline{P_1C} = 7$，描述 $P_2, P_3, \cdots$ 點所在的位置。

(2) 若起始點 P_1 滿足 $\overline{P_1C} = 12$，描述 $P_2, P_3, \cdots$ 點所在的位置。

點

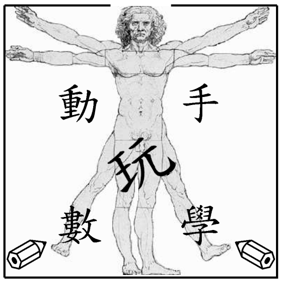
$$P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$$

有無限多個，想要描述它們，並非容易的事情，除非發現它們具有某種特殊的規律性。就如同數列一樣，等差或等比數列，很容易描述，因為它們具有容易描述的代數規律性⋯後一項與前一項的差是個固定的常數或者後一項與前一項的比是個固定的常數。不過不要忽略，除了等差與等比這種規律的性質外，呈現週期性的現象，也是容易描述的一種規律。例如聯考考過的數列：數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = \frac{6}{7}$ 及

$$a_{n+1} = 3.5a_n(1 - a_n) \quad (n \geq 1).$$

它就是具有週期性的數列。讓我們抱著動手玩數學的心情，實際操作這道遊戲幾個輪迴，你將會有想像不到的規律發現。

如果把三角形的邊長設為 $BC = a, CA = b, AB = c$（a, b, c 是可以構成三角形三邊邊長的正實數，不一定是正整數），那麼研究看看：當 P_1C 為何時，會產生 $P_1 = P_2$ 的不動現象。也可以將這道遊戲推廣到四邊形或多邊形的情形。特別在四邊形時，會產生很奇怪的現象。



遊戲 **6**

☆☆

取一大於 1 的正整數 a_1，接下來的數字 $a_2, a_3, a_4, \cdots$ 定義如下

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 1, & \text{當 } a_n \text{ 為奇數時；} \\ \frac{a_n}{2}, & \text{當 } a_n \text{ 為偶數時。} \end{cases}$$

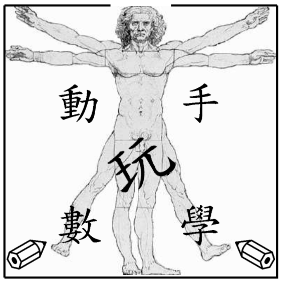
關於這樣的規律所產生的數列有一很有名的猜想（角谷猜想），角谷猜想預測無論 a_1 是何數，數列 $\langle a_n \rangle$ 最後都會變成 $4, 2, 1, 4, 2, 1, \cdots$ 的情形。例如，當 $a_1 = 13$ 時，根據規律得到

$a_2 = 3 \cdot 13 + 1 = 40, a_3 = 20, a_4 = 10, a_5 = 5, a_6 = 3 \cdot 5 + 1 = 16, a_7 = 8, a_8 = 4, a_9 = 2, a_{10} = 1, \cdots$。

如果開始時所取的 a_1 是奇數，而且第四項 $a_4 = 169$，那麼第一項 a_1 有幾種取法？

美國數學科普作家加德納把這問題稱為「冰雹猜想」，數字就像夏天雲層中的冰粒，受到氣流的激烈擺佈，時而向上，時而向下。日本數學家角谷靜夫對此問題作過計算，把這問題自歐洲引進日本，日本人便稱此問題為「角谷猜想」，比較直接的稱呼是「$3n+1$ 問題」。

奇與偶顯然是角谷猜想的重點，也是整數最簡單的分類。這問題只是檢驗你對奇、偶的處理能力。



遊戲 **7**

☆

小明做數學時，發現

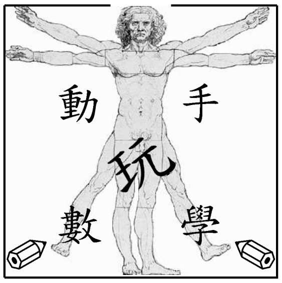
$$\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt{2-\frac{2}{5}}=2\sqrt{\frac{2}{5}}$$
$$\sqrt{3-\frac{3}{10}}=3\sqrt{\frac{3}{10}}$$
$$\sqrt{4-\frac{4}{17}}=4\sqrt{\frac{4}{17}}$$
$$\vdots$$

按上述規律：

(1) 第五個等式為何？

(2) 第 n 個等式為何？並證明之。

這是大陸《希望杯》數學邀請賽的考題。發現規律與證明規律是學習數學很重要的步驟。最常見的發現規律問題是整數規律的發掘或幾何規律的探索。



遊戲 **8**

☆☆☆

泰雅族女子在十三、四歲的時候，就開始跟著母親學習織布的技巧，也開始為自己準備出嫁時的衣裳。今有一泰雅族女子善於織布，織得很快，織的尺數成如下的規律增加：第 1 個月織 14 尺；第 2 個月比第 1 個月的 1.5 倍還多 1 尺；第 3 個月比第 2 個月的 1.5 倍還多 1 尺；…等。

(1) 此泰雅族女子第 5 個月織幾尺。

(2) 如果前 n 個月都以這樣的規律增加，那麼第 n 個月該女子織布幾尺（以 n 表示）。

在《張丘建算經》上，等差級數是書中一項重要內容，例如

(a) 某女子善於織布，一天比一天織得快，而每天增加的數量都一樣。已知第一日織 5 尺，30 日共織 930 尺，求每日比前一日多織多少？

(b) 有一女子不善織布，逐日所織布按日遞減，已知第一日織 5 尺，最後一日織 1 尺，共織了 30 日，問共織布多少？

如果把 (1) 中第 n 日織布長度設為 a_n 尺，那麼不難推得 $\langle a_n \rangle$ 滿足

$$a_n = a_{n-1} + 3. \tag{1}$$

至於等比級數，在《莊子・天下篇》中說過：「一尺之棰，日取其半，萬世不竭。」這段反映古人對下列無窮級數和結果的思想

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1.$$

如果把第 n 日截取的竿長設為 a_n 尺，那麼不難推得 $\langle a_n \rangle$ 滿足

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2}. \tag{2}$$

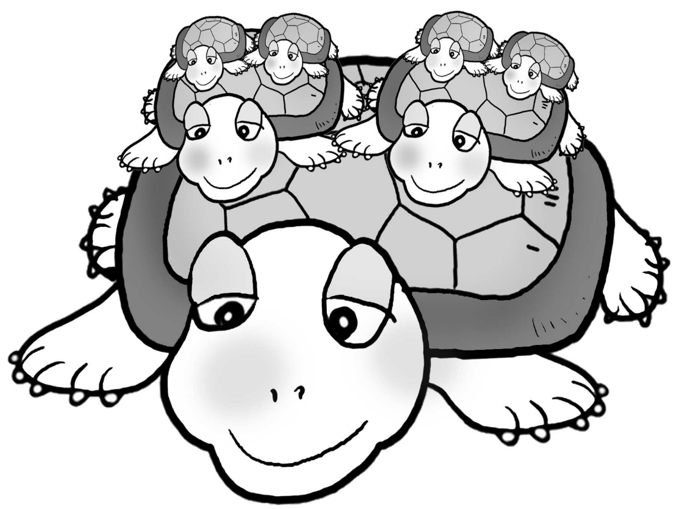
滿足關係式 (1) 的數列 $\langle a_n \rangle$ 稱為等差數列，而滿足關係式 (2) 的數列 $\langle a_n \rangle$ 稱為等比數列。等差與等比數列是歷史悠久，且極為重要的數列，這兩種數列可以求得一般項 a_n 的公式。

本遊戲是模仿《張丘建算經》中的問題而來，令 a_n 為該女子第 n 個月織布尺數，試著寫下 a_n 與 a_{n-1} 所滿足的關係式，並想辦法求得一般項 a_n 的公式。

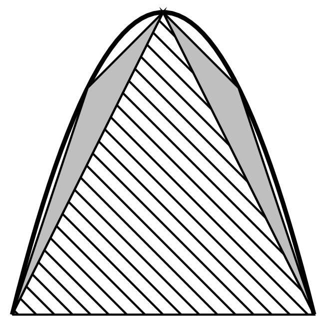
遊戲 **9**

☆☆

一隻大烏龜馱上 2 隻中烏龜，這兩隻中烏龜的重量都是大烏龜的八分之一，又每隻中烏龜又背著 2 隻小烏龜，這兩隻小烏龜的重量也都是中烏龜的八分之一，如此疊上去。已知最底下的大烏龜有 3 公斤重，求所有烏龜的總重量？



拋物線與弦所圍的區域稱為拋物線的弓形，世界上第一位會算拋物線弓形面積的人是兩千多年前的阿基米德。阿基米德以弦為底畫出一個三角形，之後在兩邊再各畫一個三角形，如下圖所示：



阿基米德說：「如果依照這樣的規律一直畫上去，那麼這些三角形的面積總和就會是拋物線的弓形面積。」直觀看來，兩者的差異越來越小，問題是，這些三角形有無窮多個，而且不知道其面積總和該如何求？阿基米德進一步說：「馱在上面的兩個三角形之面積和是底下這個三角形面積的四分之一，由此可推得拋物線的弓形面積是最大三角形面積的三分之四倍。」

在沒有微積分的幫忙之下，能夠算出這樣的結果，算是出類拔萃之人，在我們學會多項式的微積分之後，就很容易驗證阿基米德的這些結果。

將上述情境中的三角形改成烏龜，面積視為烏龜的重量，就是這裡所談的問題！利用無窮等比級數的求和公式算烏龜的重量總和。