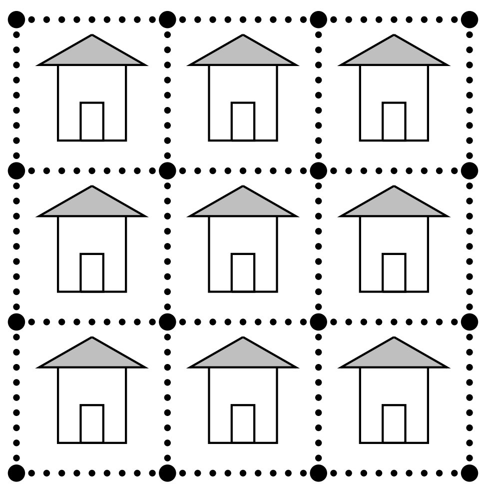
戲 說 數 學

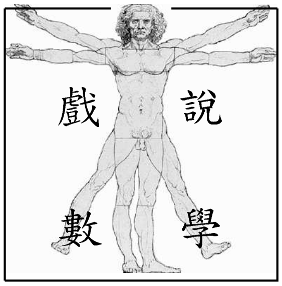
許 志 農

國立台灣師範大學數學系

November 21, 2007



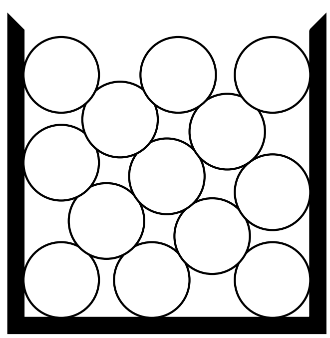
目 錄



在蔡倫發明紙張之前，中國只能將文字書寫在竹簡（竹子）上，因為竹簡細長，所以文字只能直寫，而且沒有空間可以畫圖；同樣處於沒有紙張的西方，他們將文字書寫在紙草或羊皮上，因為紙草或羊皮是整片的，所以可以畫圖。這個小小的差異，對數學的影響是巨大的，例如歐幾里得的《原本》與阿基米德在西西里島海灘上隨手畫的幾何圖形就能夠保存到現在，但中國的數學古籍就只能靠文字相傳，沒辦法透過圖形的輔助讓後人更清楚瞭解他們的想法。阿基米德在海灘上拿著竹竿邊畫圖邊思考的解題方式跟現代人在紙張上亂塗推理的方式很接近。在中世紀文藝復興時期，搞不好會做個木工工藝或石頭雕刻來幫助理解與實際驗證所考慮的問題。但處於科技革命的時代，又多了一項解題方式…借助電腦動畫思考。

總之，目前我們至少有三種不同的思考方式…利用紙上談兵，工藝實做推敲與電腦動畫模擬。《戲說數學》盡可能把每道遊戲都寫出可在電腦上操作的 Flash 版本。至於仍無法完成 Flash 版本的遊戲，希望可以做出木工道具來實際操作一番。就讓我們來介紹這節的遊戲：

✎ **1** 在長方形的酒櫃隨意擺放完全一樣的紅酒十三瓶，如下圖所示，只要求最底層擺三瓶，其中的左右兩瓶需與側邊相切：

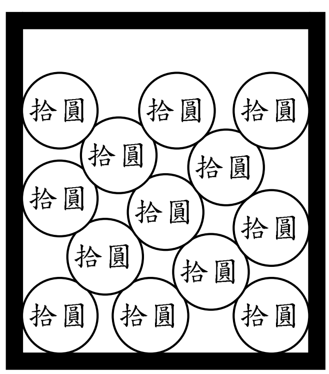


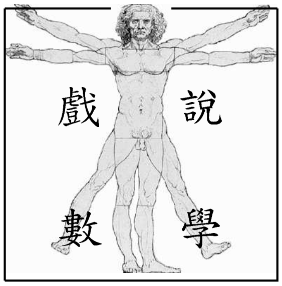
看起來，最上層所擺放的三瓶酒之高度一樣，真的會這麼巧嗎？

既然這道遊戲起因於酒櫃的十三瓶酒的擺放藝術，就讓我們回到達文西與米開朗基羅的文藝復興時代，實際做個工藝品來把玩與驗證一下！如果有幸到我的辦公室一趟，你將看到我為這道遊戲所做的一件工藝品…在邊長約 30 公分的方形木板內，擺放著每個直徑差不多 7 公分左右的實木圓盤，總共有 13 個圓盤，而且可以把它掛起來欣賞，心情不好時，也可以把這 13 個實木圓盤重新擺放一番。

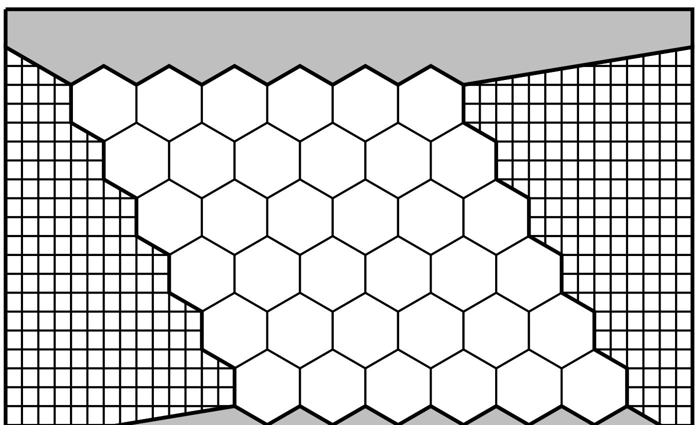
為了做這件工藝品，從找木材店到購買圓柱形木頭，木板，鋸子，磨砂紙，最後自己施工起來。老實說，這 13 個實木圓盤鋸得很不平整，用磨砂紙磨了好一段時間才勉強可用。在規劃與製作這件工藝品時，我回想高中工藝老師教我的知識，同時也讓我回想起高中的一件糗事：原來我高中工藝筆試是補考過的。記得那次段考的第一節考英文，工藝筆試排在第二節考，我與室友住在南一中附近租來的房子，為了準備英文，前一晚我們都很晚睡，雖然設定了鬧鐘，但是早上醒來時，工藝筆試已快考完了，原因就是睡夢中將鬧鐘給按掉了。事後我們買了一個鳥籠，把鬧鐘關在籠子裡，再買一道鎖，將鳥籠的門鎖上，這樣就不會按掉鬧鐘了。

當我將工藝品幾乎做好的同時，想到一個更好的操作方式，就是拿個寬約 9∽10 公分的市售相框，再取 13 枚直徑 2.5 公分的拾圓銅板，把它們擺在相框內，就可以玩這道遊戲了，如下圖所示：





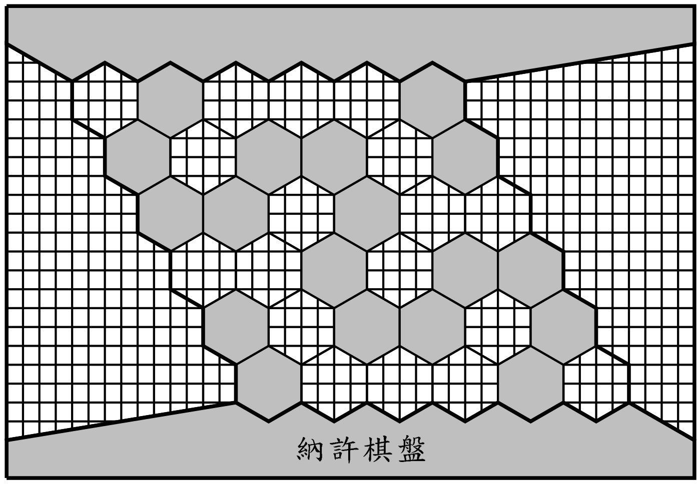
看過電影「美麗境界」嗎？那部電影的主角是一位數學家，叫納許，劇情是演納許對抗病魔三十幾載，最終獲得諾貝爾經濟學獎的動人故事。這裡所要談的納許棋，是納許在普林斯頓高等研究院所發明的一道遊戲。事實上，早在納許發明這道遊戲的十幾年前，丹麥就有人提出過類似的遊戲，而且在丹麥很受歡迎。跟圍棋及西洋棋不同的地方是，納許棋盤是由正六邊形的格子所構成。我認識納許是從他的納許棋盤開始的，棋盤的樣子如下（這是 6 階的棋盤，共由 $6 \times 6 = 36$ 塊正六邊形土地鋪成）：


納許棋盤

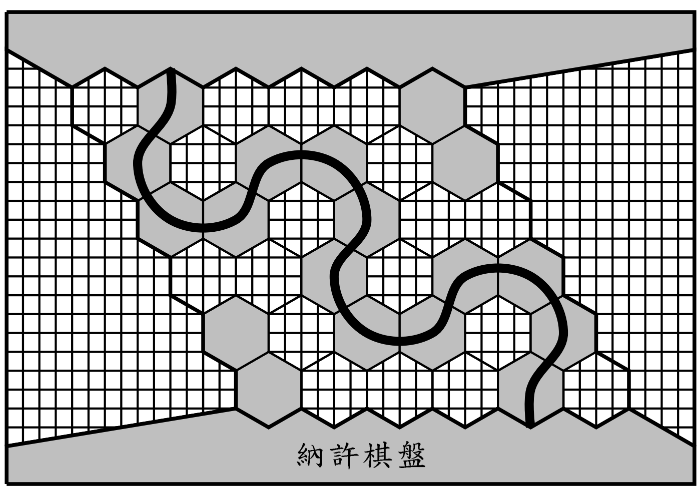
「灰」姑娘與「網」先生正在玩「納許棋」的遊戲。為了公正起見，棋盤內正六邊形土地以外的區域涇渭分明，上、下兩塊為灰姑娘的灰色領土，左、右兩側則是網先生的網狀土地。現在兩人輪流佔領正六邊形的土地，每次只能佔一塊，並將佔領的土地塗成灰色（灰姑娘的領土）或畫成網格（網先生的土地）。在十八回合後，灰姑娘與網先生將分別佔領三十六塊土地的一半。

遊戲的勝負如何判定呢？那要看誰能將她（他）的兩塊土地，用佔領的正六邊形土地連接起來。也就是說，灰姑娘從上方灰色領土出發，在只能經過她佔領的正六邊形土地的情況下，

可以到達下方灰色領土出時，灰姑娘就獲勝；同樣的，若網先生從左側的網狀土地出發，利用他所佔領的正六邊形土地，可以抵達右側的網狀土地，則網先生得勝。例如，下圖是灰姑娘與網先生某次的交戰紀錄（灰色正六邊形為灰姑娘所佔，網格正六邊形為網先生所有）：



在下圖中，因為粗黑線的路徑是灰姑娘從上方灰色領土走到下方灰色領土的一條路徑，所以這盤棋由灰姑娘得勝。



從遊戲的特性不難發現，不可能兩人都獲勝，如果一人可以連接他的領土，那麼另一人的土地肯定被這串連的線所阻隔。也就是說，至多僅有一人可以把他的領土串連起來。有沒有可能發生兩者都無法串連她們的土地之情況呢？這正是本節所要討

論的問題：

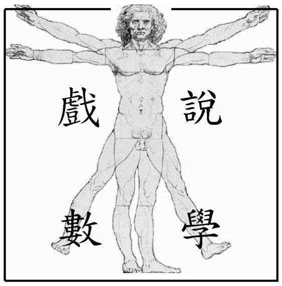
✎ **2** 無論雙方如何佔領正六邊形土地，最後一定有人會得到勝利，也就是說，納許棋是一種不會平手的遊戲。

我們可以將納許棋盤設計成電路，當一方將兩片土地串連起來時，電就通了，會亮燈，從亮燈的顏色就可以知道誰獲勝。想把這道遊戲設計成電腦可以玩的遊戲，就需要從電路這個方向來寫程式。幸運的是，網站上有人幫我們完成了這件工作，只要到底下的網站

http://home.earthlink.net/∽vanshel/

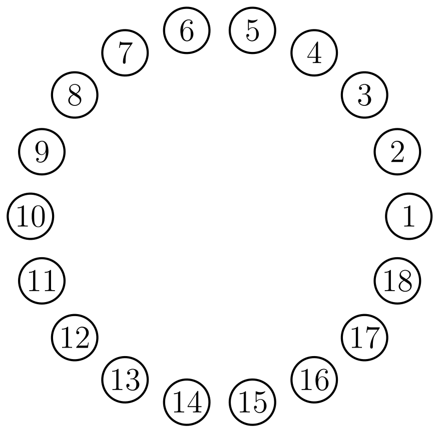
就可以下載納許棋來玩，可以跟電腦玩，也可以兩人玩，甚至可以改變棋盤的大小。

3　塗球遊戲…圓是最完美的圖形



義大利詩人但丁說過「圓是最完美的圖形」，圓的完美來自於它有一個圓心，而圓周完全對稱於圓心。阿基米德說「給我一個支點，我能將地球撬起來」，看似不可能，但在科學的意義是很深遠的，例如，只需給一個點，圓規的一隻腳壓在這點上，另一隻腳就可以畫出完美且對稱的圓。

這些故事都在說明，找到關鍵點或發現可用的科學概念，隱藏的和諧就變成看得見的和諧。在這裡，我們將討論一道圓周上的遊戲



這道遊戲是從東歐的遊戲演變而來。

✎ **3** 將 18 個白球圍成一圓圈，甲、乙兩人進行塗色遊戲，規則如下：

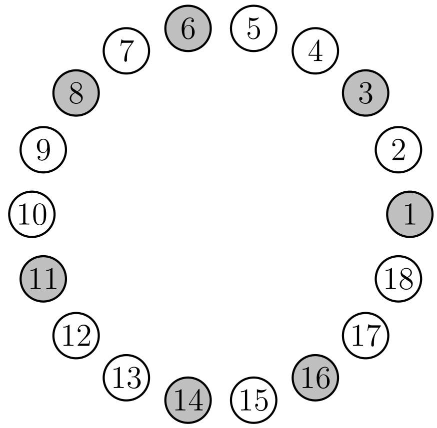
(1) 甲、乙輪流塗色，每次選取一個白球，把它塗成灰色。

(2) 塗過灰色的球不能再塗。

(3) 不能塗完色之後，發生相鄰兩球都是灰色的情形，這樣算違例。

(4) 放棄或違例者輸。

下圖是甲塗 4 顆球，乙塗 3 顆球後的情形：



塗球次序列表如下：

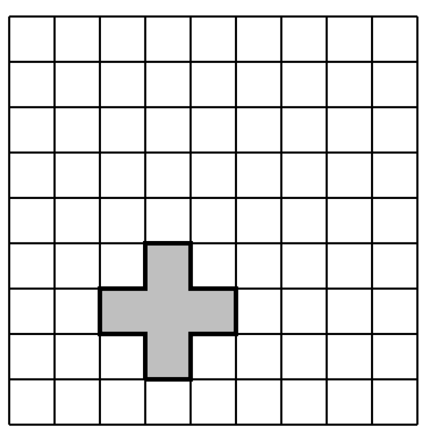
甲	3	11	6	16
乙	1	14	8	？

輪到乙選球塗色，顯然無法做到，所以甲勝。

試問：這塗球遊戲是先塗色的甲或慢點塗色的乙有必勝的策略呢？

想想看！如果將 18 個球改成偶數個球，那麼結果為何？又若是奇數個球，則情形又怎樣？當筆者打字到這裡時，靈光乍現，忽然聯想到一道雷同的遊戲，就順手將它記錄下來，並取名為鋪十字形磁磚的比賽：

甲、乙兩人輪流在 9×9 的地上鋪十字形磁磚，規則如下：



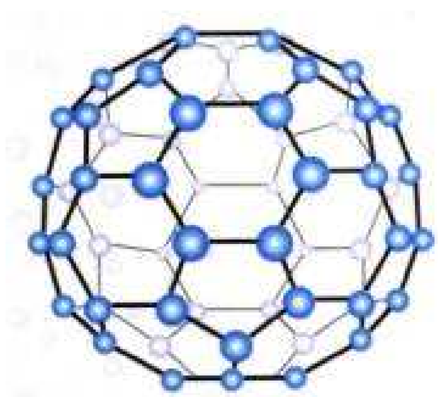
(1) 輪流鋪十字形磁磚，每次一塊。

(2) 不可以鋪超出土地，也不可以與已鋪設的十字形磁磚有所重疊。

(3) 放棄或無法鋪設者輸。

問：誰可以贏得比賽，策略為何？（註：十字形磁磚無法蓋滿整個土地）

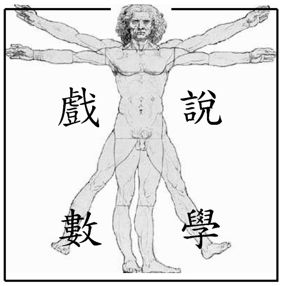
我們也可以將圓上的塗球遊戲推廣到立體的球上，但是先要在球的表面勾勒出可以玩的鏡射線條。最典型容易想到的大概是足球上的線條，但是足球上的點不夠多，比賽很快就結束。這裡提供碳六十巴克球 C_{60}（俗稱奈米球）當模型，它是由 60 個碳原子所組成，其結構如下圖中的左圖所示：



不難發現每個碳原子與三個碳原子相鄰，當選擇一個碳原子之後，其相鄰的三個碳原子就不准選取。在這樣的規則下，由於奈米球完全對稱於球心的關係，後玩者只需利用空間中對球心的點對稱原理就可以打敗對手。這種空間中有關球面的點對稱跟平面上有關圓周的點對稱，道理上是相通的。

談到空間，我們身處的世界就是一個典型的例子。前一陣子大家對梵谷的名畫「星夜」（上圖中的右圖）有許多天文上的討論，該畫是梵谷過逝前一年 1889 年在療養院畫的。拜近代天文望遠鏡所賜，天文學家發現：「星夜」畫中所纏繞的漩渦很像漩渦星系 M51，而且將星圖軟體調回 1889 年六月，將發現星星的相對位置大致與畫相吻合。唯一的差別是漩臂的纏繞方

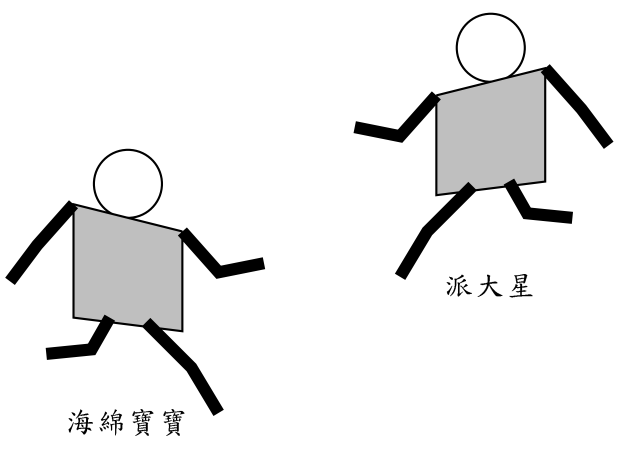
向與漩渦星系 M51 剛好相反，正確的說是呈現出空間中的點對稱。



一隻老虎的臉孔，一隻螃蟹的體態，一片葉子的形狀，人類的身體，一個完整的圓以及蜂窩結構等等，乍看之下給人的感覺是完全均衡的，這多半要歸因於他們的對稱。對稱是一種數學均衡的行為，也是讓宇宙和諧的重要支柱，一般所談的對稱有三種：圓周對稱於圓心是「點對稱」，人類身體的左右對稱稱為「線對稱」，例如，達文西的《維特魯威人》這幅素描就是線對稱，而人照鏡子時，與鏡中人的對稱稱為「面對稱」。又球對稱於球心也是點對稱，圓周對稱於直徑是線對稱，球對稱於通過球心的平面為面對稱。

▲動物的線對稱體態

有過請教練教球的經驗嗎？如果有，那將很容易理解點對稱的好處。

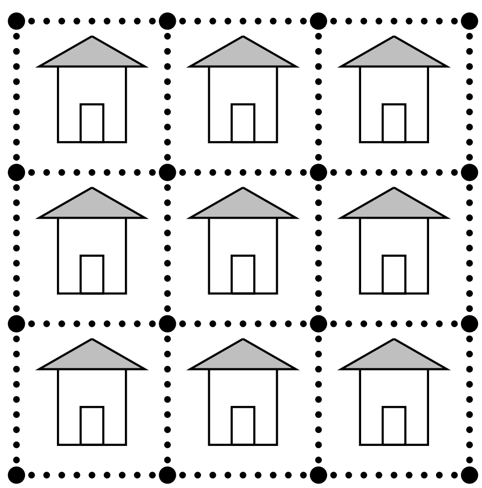


▲海綿寶寶與派大星教練的點對稱練球

當你站在教練的對面，教練命令你拿著拍子跟他一起揮拍時，會發現教練跟你的揮拍動作剛好對稱於你與教練連線的中點，而且這是一種點對稱。與教練同步揮拍，看似模仿與跟隨，或者說拿香跟著拜，但更貼切的說，它是在做對稱這種均衡的運動。他有兩個好處，其一，練好基本動作，其二，在比賽時，只需與對手作完全對稱的動作，就可以把球打回去。所以模仿、跟隨或者說拿香跟著拜一定就不好嗎？不要受到文字的影響，事實上，他們就是對稱的意思。

其實，對稱這道「數」光一直普照著我們的日常生活，但是我們始終對他的理解不夠深入，甚至沒有注意到它的存在。我們希望透過一道遊戲讓讀者更深入的瞭解對稱。

✎ **4** 甲、乙兩兄弟以蓋房子的圍牆來分祖先所留下來的九間房子，這九間房子的分佈如下圖所示，每間房子有四面圍牆，而相鄰的房子可以共用一面圍牆，所以只需蓋 24 面圍牆（圖中的 24 條虛線），九間房子的圍牆就可完成：



甲、乙蓋圍牆的規則是這樣的：

(1) 甲、乙輪流，每人每次只能蓋一面圍牆，蓋過的圍牆不能重複蓋。

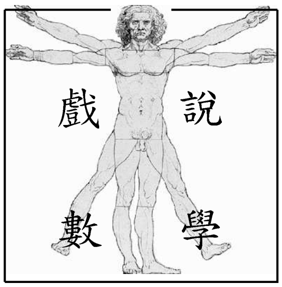
(2) 房子屬於蓋第四面圍牆者。

(3) 佔有最多房子者勝。

問：先蓋圍牆者或後蓋圍牆者會贏，又其策略為何？

這道遊戲與坊間書籍所談的「佔房子遊戲」很像，但有很大的差別。一般書籍的遊戲規則是「當佔了一間房子時，還可以再圍一道牆壁」，而這裡是不行的，兩人輪流，每次只能圍一道牆壁。這個差別對遊戲的影響很大，一般書籍所談的「佔房子遊戲」，並沒有很好的數學方法或策略來告訴玩者「誰會贏，用什麼玩法。」

5　在正五邊形上跳舞…搶 20 的遊戲



將船艙改裝成書店，航行在世界各地，販售各國書籍，是一種新鮮的經營模式。記得民國七十六年我在高雄實習時，從報紙上得知有一艘這樣的海上書展船會停泊在高雄港，於是利用假日登船尋寶一番。對於這趟挖寶之旅，只記得一件事情，那也是一則數學遊戲在台灣深根的開端。經過二十年的進化，那道有關累加數字遊戲，早已從舶來品成長為在正五邊形上操作的移動硬幣遊戲。對於這樣的在地貨，不介紹給大家認識，是有點可惜。

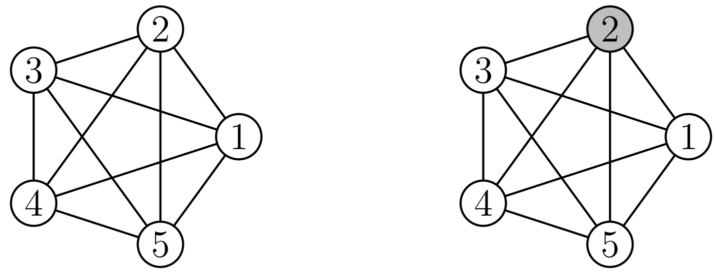
假設遊戲者為甲、乙兩人且甲先玩，並遵守下列規則：遊戲者必須輪流從

$$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}$$

中選擇一數，但不可重複對方剛選的數。如此下去，將兩人所選的數字累加起來，當累加至正整數 20 者算贏（動彈不得或故意讓累加的數字超過 20 者算輸）。問：甲或乙有必勝的策略？這是那道舶來品的原來敘述，後來我把它修改成「將一枚硬幣放置在上述五個數字內，甲、乙兩人輪流移動硬幣並累加的遊戲」。最後，又將此遊戲與正五邊形相連結。

古希臘歐幾里德在他的《幾何原本》中描述了一個用直尺和圓規做出正五邊形的過程，也因為這個緣故，正五邊形成為歐氏學派重要的圖騰。我將那道移動銅板的數字遊戲與正五邊形結合成如下的遊戲：

✎ **5** 如下圖的左圖所示，在正五邊形的五個頂點各畫一個圓，並依序寫上 $1, 2, 3, 4, 5$ 等五個數字。甲、乙兩人在這幾何圖形上玩累加數字遊戲，規則如下：



(1) 先玩的甲拿出一枚拾圓硬幣，放置在五個頂點中的一個（上圖中的右圖代表甲將硬幣置於編號 2 號的頂點）。

(2) 後玩的乙必須將硬幣依著邊線或對角線，移動至其它編號的頂點。

(3) 接著甲同樣將硬幣依著邊線或對角線，移動至其它編號的頂點，即硬幣不可以不移動的意思。

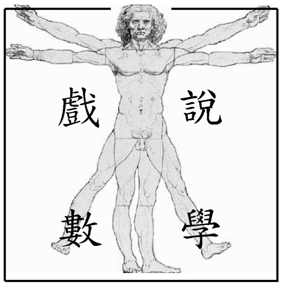
(4) 依此規則，輪流移動硬幣。

(5) 將移動到的頂點編號累加，當移動完硬幣後，頂點編號累加剛好為 20 者贏，放棄或超過 20 者輸。

關於這道遊戲，先玩或後玩者有必勝的策略呢？

如果我們將累加數 20 改成其餘數字 N，那麼探討「何者有必勝的策略」是一道不錯的研究問題。顯然，當 $N = 1, 2, 3, 4, 5$ 時，先玩的甲肯定有必勝的策略（只需將硬幣直接置於該數字的頂點上即可）。而當 $N = 6$ 時，誰有必勝的策略呢？不經思索的情況下，很多人會誤認為乙有必勝的策略，但事實並不是這樣。

6 碩大就是美…超過樹狀圖的範圍



在數學上，有關計算個數或比較大小的問題，除非有很好的公式可代入精確計算或比較大小，否則使用樹狀圖進行分析、歸類及統計是不得不的一種計算方式。同樣地，在兩人玩的遊戲中，人們也可以畫樹狀圖來進行模擬一番，只是比賽進行中樹狀圖只能在腦海裡想像，無法像解數學題目一樣，在紙張上畫。但是，樹狀圖也有它的缺點，當樹狀圖產生迴圈或樹狀圖太過複雜（圖繁不及備載）以致於無法從中看出端倪時，樹狀圖的用處就被侷限了。也就是說，樹狀圖只是一種輔助思考的實體，隱藏在樹狀圖背後的規律才是解題的重點。我們來欣賞一道小學競賽的數學遊戲題：

✎ **6** 將寫有

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

六個數字的六枚金幣隨意的排成一列，例如

③④②⑥⑤①

接下來甲、乙輪流拿取金幣，規則如下：

(1) 每人每次取一枚金幣，取後不放回。

(2) 每次只能從兩頭取金幣，也就是說，夾在中間的金幣不能取。

(3) 在三個輪迴之後，甲乙各取三枚金幣，所取三枚金幣的數字和較大者獲勝。

問：誰有必勝的策略，又這策略跟六枚金幣的排列方式有關嗎？

收集與開發有趣的數學遊戲是一件苦差事，這道遊戲是我到嘉義東石高中演講時，林信權老師聽了我講的幾道遊戲後，忽然間想到最近學生參加競賽所做的一道數學遊戲，提供給我參考的。而那個競賽是九章文教基金會所舉辦的「2007 小學數學競賽選拔賽複賽」，原題是這樣的：

A、B 兩人玩紙牌遊戲，紙牌共 10 張，牌上分別印有數

$$1, 2, 3, \cdots, 10.$$

B 將牌依任意次序在桌面上排成一列，每個人都可看到牌上的號碼。由 A 先開始輪流每人每次拿一張牌，每次只能從整列牌的兩端拿牌，直到拿光為止，所取得的牌上的數的總和較大者為贏家。請問無論 B 如何安排這些牌，無論後取牌的 B 如何取牌，A 有無必勝的策略？請詳細說明你的理由。