

# 數學競賽簡介

報告者：張幼賢

地點：薇閣中學

時間：2007/10/26

## 壹、數學競賽的種類

### 一、國內自行舉辦的數學競賽

#### (一) 國中數學競賽

##### 1. 地方教育局主辦國中數學能力競賽

(1) 校內初賽 (由各校自行命題)

(2) 地區競賽 (由主辦學校邀約高中老師命題)

##### 2. JHMC (九九文教基金會主辦) (由試題委員會邀約高中數學教師命題)

#### (二) 高中數學競賽

##### 1. 教育部主辦高中數學能力競賽

(1) 校內初賽 (由各校老師自行命題)

(2) 地區複賽 (分北、中、南，由三所師大教授命題)

(3) 全國決賽 (由三所師大輪流主辦，邀約學者命題)

##### 2. TRML (九九文教基金會主辦) (由試題委員會邀約學者命題)

### 二、配合國際舉辦的數學競賽

#### 1. 環球城市杯數學競賽—初級卷(國中)、高級卷(高中) (九章文教基金會主辦)

(在國內考試)

#### 2. 美國 AMC (九九文教基金會主辦) (在國內考試)

#### 3. 澳洲 AMC (高師大主辦) (在國內考試)

#### 4. ARML (九九文教基金會) (在美國考試)

#### 5. APMO 亞太數學奧林匹亞競賽 (中央大學統計所主辦) (在國內考試)

#### 6. IMO 國際數學奧林匹亞競賽 (中央大學統計所主辦) (在主辦國家考試)

## 貳、考試內容與方式

一、考試內容：所有的考試內容都不出於代數、數論、幾何、離散數學(含組合、圖論、數列、級數、機率統計)、推理、三角、不等式、函數方程等範圍。

二、競賽考試方式：不同的競賽，考試方式不盡相同。

(一)、國內數學競賽考試方式

1. 國中數學競賽

(1). 各地方教育局主辦國中數學能力競賽：含填充、計算與證明題。

(2). JHMC 以 4 人一隊參賽，競賽考試有：競速賽、個人賽與團體賽三種，全部都是填充題。前兩種競試是個人作答、最後一種是團體作答。

項目	時間	題數	配分	作答方式	備註
<b>The Sprint Round</b> 競速賽	40 分鐘	30 題	120 分	1. 個人獨立作答 2. 只須簡答	1. 每題 1 分 2. 個人得分 30 分
<b>The Target Round</b> 個人賽	24 分鐘	8 題 (2 題 × 4 回)	32 分	1. 個人獨立作答 2. 只須簡答 3. 本項分成四個回合作答	1. 每回 6 分鐘 2. 每回 2 題 3. 每題 1 分 4. 個人得分 8 分
<b>The Team Round</b> 團體賽	20 分鐘	10 題	48 分	1. 全隊共同作答 2. 只須簡答 3. 全隊共同繳交一份答案卷	1. 第 1-8 題 每題 4 分 2. 第 9-10 題 每題 8 分
<b>總分</b>			200 分		

此外，IJSO 國手選訓營，數學成績占 20%。

2. 高中數學競賽

(1). 地域複賽：含填充(競試二)、計算證明題(競試一)。

(2). 全國決賽：含競試(一)、競試(二)與獨立研究，全部都是計算證明題，得獎(一

等獎、二等獎、三等獎)排序只計算競試成績，不計算獨立研究成績，不過未獲獎同學將按總成績及獨立研究成績推薦至 GMC。

- (3). GMC：含模擬考試與獨立研究，兩種成績都計，全部都是計算證明題。  
 (4). APMO 研習營：有模擬考試與獨立研究，兩種成績都計，全部都是計算證明題。  
 (5). IMO 選訓營：分三階段，有模擬考試與獨立研究，全部都是計算與明題。  
 (6). TRML 以 15 人一隊參賽，試題分個人賽、接力賽、團體賽與思考賽(個人賽、接力賽、團體賽為填充題，思考賽為計算與證明題)。

項目	時間	題數	配分	配分百分比	作答方式	備註
<b>TEAM QUESTIONS</b> 團體賽	20 分鐘	10 題	40(10×4)	16.7 %	1.全隊共同作答 2.只須簡答	
<b>POWER QUESTIONS</b> 思考賽	60 分鐘	10 題	40	16.7 %	1.全隊共同作答 2.須有計算過程	
<b>INDIVIDUAL PROBLEMS</b> 個人賽	40 分鐘 (10 × 4 回)	8 題 (2 題 × 4 回)	120 (每人每題 1 分:15 人 × 2 題 × 4 回)	50 %	1.個人獨立作答 2.只須簡答	1.每回 10 分鐘 2.每回 2 題
<b>RELAY QUESTIONS</b> 接力賽	12 分鐘 (6 × 2 回)	2 組 (1 × 2 回)	40(5 組 × 4 分 × 2 回) 兩階段給分: (1) 3 分鐘 : 4 分 (2) 6 分鐘 : 2 分	16.7 %	1.3 人接力作答 2.只須簡答	1.每組 3 人 2.每回 6 分鐘 3.於 3 分鐘及 6 分鐘各有一次交卷機會
<b>總分</b>			240			

## (二)、國際數學競賽方式

1. 環球城市杯數學競賽：全部都是計算證明題。
2. 美國 AMC：分 AMC 8、AMC 10、AMC 12、AIME —前三者為選擇題，最後的 AIME 邀請賽是計算證明題。
3. 澳洲 AMC：填充題，試題難度介於美國 AMC 8 與 AMC 10 之間。

4. ARML：以 15 人一隊參賽，試題分個人賽、接力賽、團體賽與思考賽(前三者為填充題、最後的一項競賽為計算證明題，考試時間及計分方式同 TRML)。以 AMC 10、AMC 12 成績優良的學生為邀請對象。
5. (APMO)亞太數學奧林匹亞競賽：共五題計算證明題，考試時間 4 小時。
6. (IMO)國際數學奧林匹亞競賽：分兩天考試，每天考 3 題計算證明題，考試時間每天 4.5 小時。

### (三)APMO 簡介

APMO 是亞太數學奧林匹亞的英文縮寫，最早由澳洲所首創，原定位為在 IMO 之下亞洲及太平洋沿岸國家參與的地區性的數學競賽，我國於第一屆就開始參與。目前參賽的國家不一定僅限於上述地區的國家，也有些上述地區的國家並未參與(如中國大陸就未參加)。我國、南韓、美國及日本是該項比賽經常的領先國家，目前是由南韓所主辦。

APMO 的試題由各參賽國家於前一年的 IMO 競賽時提供給主辦國，由主辦國選擇合適的 5 道題目當作競賽試題；考試時間為 4 小時，全部都是計算證明題。所有參賽國家在同一時間(時差必須在 12 小時以內)於各國自舉行，每個參賽國自行閱卷(閱卷給分標準由主辦國提供)，各國分別可獲得一面金牌、兩面銀牌、四面銅牌及三名榮譽獎牌；但於閱卷結束後，需將各獎牌最後一名的試卷寄到主辦國存查。主辦國將於適當時間公布各國平均成績與國家排名。

### (四)IMO 簡介

第一屆的 International Mathematical Olympiad (以下簡稱 IMO) 是於 1959 在羅馬尼亞舉行，當年只有 7 國參賽；目前大約已擴充至來自於五大洲的八十多個國參賽。IMO 是國際高中學生的數學競賽，每年競賽一次，在不同的國家舉行，我國曾在台北市主辦 1998 年的競賽。

每個參賽國家可以派 6 位學生參加競賽，這 6 位學生以尚未進入大學的學生為限。我國教育部為選拔及培訓我國的參賽學生選手，特舉辦一系列的競賽及研習營(各校初賽、地區複賽、全國競賽、GMC 研習營、APMO 研習營、APMO 競賽、IMO 選訓營(分三階段)、IMO 培訓營)，也為這些學生安排了優厚的升學及獎勵辦法，足見我國政府對此競賽的重視。當然，教育部投注這麼多的心力及金錢於此活動，不僅是為了我國選手能奪得獎牌，也是為了提昇高中生對數學興趣的教育意涵。

IMO 競賽分兩天舉行，每天考 3 題，考試時間為 4.5 小時。所有參賽學生，有不多於一半的人可以得獎，金、銀、銅牌得獎比例為 1:2:3；未獲前述獎牌，但有一題以上得滿分者可以獲得榮譽獎，我國自 1993 年參賽以來，成績都十分亮眼。

### (五)AMC 簡介

AMC是American Mathematics Competitions的簡稱，又稱為American High School Mathematics Examination美國中學數學科考試 (AHSME)，是由美國數學協會 (Mathematics Association of America) 於1950年成立，目前總部設於美國內布拉斯加大學林肯校區 (University of Nebraska-Lincoln)，是美國數學協會 (Mathematics Association of America) 的直屬機構。每年正式登記應試的學生，僅在北美地區就超過六十萬人次，也因此AMC是目前世界上信度和效度最高的數學科試題。而全球進行同步測驗的國家還有加拿大、新加坡、香港、日本、匈牙利、希臘、土耳其、法國、等二十餘國。此項測驗已獲美國中學校長推薦為每年的主要活動之一。

AMC 測驗的種類：

- AMC 8
- AMC 10
- AMC 12
- AIME

AMC 命題原則：

- 題目須具有創造性
- 題目必須是有趣的
- 不能是從教科書的習題中出來的 (非制式性的題目)
- 整份試題是具有挑戰性的，但程度較差的同學也能從中拿到分數的 (鼓勵學生挑戰)
- 連鎖題 (題組)
- 生活化的題目

從上述的原則中可以看出其命題的原則能達成 AMC 測驗的精神即「**訓練學生解決問題的能力**」，從這些問題的解決中讓學生對數學產生興趣，讓數學與生活結合。

AMC 題目的難易度分配呈階梯式，由簡至難，

1. 前 5 題設定在每位考生都會的程度，
2. 第 6 到第 10 題的通過率則降為 80%~85%，
3. 第 11 至 15 題的通過率再降為 50%，
4. 第 16 至 20 題的通過率為 25%，
5. 到了最後 5 題(第 21 至 25 題)則非常難，只有極少數高成就的學生才能答對。

AMC 的命題還有一個目標，就是希望在全球報考的數十萬人中，全部答對拿到滿分的人數不會高於 50 人(但拿到滿分的人數多半超過 50 人)。儘管 AMC 已經推出五十多年，據 AMC 主辦單位(Dr. Steven. R Dunbar)的說法，各級測驗至今還沒有一題重複過。

AMC 不但是美國頂尖數學人才的人才庫，更為美國學校提供了解申請入學者數學科目上的學習成就與表現評估。AMC 成功地為許多學生因測驗成績優

良而進入理想學校。AMC 委員會主席 Prof. R. Gibbs 特別提到在美國境內，AMC 的成績在申請學校時是非常有力的依據。各個大學會主動與美國數學協會聯絡，以取得 AMC 考生的成績表現，像是麻省理工學院、耶魯大學、加州理工學院、約翰霍普金斯大學等常春藤名校等都接受 AMC 的測驗成績當作申請入學的條件，這顯示出 AMC 數學測驗相當受到美國各大名校的青睞與肯定。

AMC8 是針對國中一年級、國中二年級學生的數學測驗，25 題選擇題、考試時間 40 分鐘。AMC10 及 AMC12 分別是針對國中三年級、高中一年級學生，與高中二年級、三年級學生的數學測驗，兩種競試都是 25 題選擇題、考試時間也都是 75 分鐘；包含演算及概念理解的數學題型。AMC8、AMC10 及 AMC12 的測驗允許使用非工程用計算機。AMC10 及 AMC12 兩個測驗的主要目的是在刺激學生對數學的興趣；測驗題型範圍由容易到困難都有。參與測驗的學生應該不難發現測驗的問題都很具挑戰性，但測驗的題型都不會超過學生的學習範圍。這項測驗希望每個考生能從競賽中享受數學。被選為 AMC10 及 AMC12 的題目呈現了一些重要的數學觀念。有時，題目會將一些看似微妙但有點混淆的觀念加入試題之中，也就有所謂的陷阱題，這些試題的發展都是希望學生能夠有更慎密的思維。AMC10 及 AMC12 的另一個特殊的目的是在發掘一些對數學有才能的學生，讓校方能重視這些學生的存在；好的數學家就是這樣被發掘、鼓勵並獲得發展。希望學生能藉由競試了解自己數學能力並向上挑戰便是 AMC10 及 AMC12 的主要意義。

簡言之，對於一些數學成績不理想的學生，並不代表他對數學的才能或理解亞於其他學生；而成績優秀的學生則代表著他們證明了自己在數學上的優點。這項測驗就是為所有喜愛數學的學生所開發的競賽。

AMC12 另一項特色是此測驗的範圍涵蓋了許多知識和能力，使得成績的層級也有所不同。以榮譽證書 (Certificate of Distinction) 來說，成績在 150~100 分(或者更準確的計算)是全球考生成績前 5% 才有可能獲得榮譽證書；這是許多國際名校申請入學重要的參考依據。

AIME 是介於 AMC10、AMC12 及美國奧林匹亞數學競賽 (USAMO) 之間的一個數學競賽。只要是在 AMC12 測驗中得分在 100 分以上或成績為所有參賽者的前 5% 以及在 AMC10 測驗中成績為所有參賽者的前 1% 的學生皆可被邀請參加 AIME 數學測驗。AIME 提供了更進一步的挑戰及認可，超越了 AMC10 及 AMC12 所能提供的，這讓美國地區以外對數學方面有優異才能的學生透過了國際性的數學測驗提昇了對自己的肯定。而 AIME 成績優異的美國籍學生將再被邀請參加 USAMO 數學測驗，其最終目的是選出美國 IMO 代表。AIME 是一場 15 題應用題、考試時間 3 小時的數學測驗，每題的答案都在 0~999 這些數字之中。AIME 的測驗是將試題發展為更具程度、困難的測驗，不可能以猜測的方式就可以獲得正確的答案。但就像 AMC10、AMC12 一樣，只要有數學的概念稍加計算後即可得到答案；在 AIME 的測驗中不允許使用計算機。

AIME 就像所有的數學測驗一樣，它是推動學生對數學的發展及興趣的一個

媒介。但測驗真正的價值，在於學習前的預先準備及對數學解答更進一步的思維。

## 參、如何準備數學競賽

### 一、教師的準備

1. 蒐集近年歷屆各種競賽試題
2. 試題分類(代數、數論、幾何、離散數學、機率統計、推理、不等式、函數方程等)
3. 試題分析(解題工具、解題策略)
4. 編輯相關教學題材
5. 進行相關題材教學
6. 編製模擬試題
7. 補強教學

### 二、學生的準備

1. 研讀相關教材
2. 整理教材內容(學生必須自行思索與整理)
3. 模擬考試
4. 檢討、反思與改進
5. 統整相關內容

## 肆、對於「解題」典型的解釋：

一、問題解決是心理活動：面臨新環境或課題發生矛盾而沒有現成對策時，所引起尋求解決辦法的一種活動。

二、問題解決是一個過程：“將先前已獲得的知識用於新的不熟悉的過程稱為解決問題”(NCSM, 美國全國數學管理者大會)，所以問題解決是一個發現的過程、探索的過程及創新的過程。

三、問題解決是一個目的：“學習數學的主要目的在於問題解決”(NCSM)，所以學習怎樣解決問題就成為學習數學的根本原因。此時，問題解決就獨立於特殊問題、獨立於一般過程及方法、也獨立於數學的具體內容。

四、問題解決是一種能力：即把數學用於各種情況的能力，這也是生存的本領。

傳統上的解題(或數學家們)，把「題」作為考察對象，把「解」作為研究的目的。這些精明的數學結果只告訴我們“應用了什麼數學方法，得到了什麼數學結論”。但大多數人想知道的是“怎樣應用數學方法”，“如何發現數學結論”。今天我們要討論的是“如何尋找解題規律”及“怎樣學會解題”。我們將透過解題過程的分析去探索“怎樣學會解題”。

## 伍、解題基本要素：

- 解題的知識因素
- 解題的能力因素
- 解題的經驗因素
- 解題的非智力因素

一、**知識結構**：波利亞曾說：「貨源充足和組織良好的知識倉庫是一個解題者的重要資本。」希望提高解題效率的人都必須對下列三項下功夫：

- (1)熟練掌握數學基礎知識系統—教材的概念系統、定理系統、符號系統、數學競賽的基本理論。
- (2)深刻理解數學概念，準確掌握數學定理、公式和法則。
- (3)熟習基本的邏輯規則和常用的解題方法，累積不斷出現的數學技巧。

二、**思維能力**：解題能力表現於發現問題、分析問題、解決問題的敏銳性、洞察力及整體把握。其主要成分是三種基本數學能力(運算能力、邏輯思考能力、空間想像能力)，重點是能否掌握正確的思維方法(包括邏輯思維與非邏輯思維)，其基本要求為：

- (1)掌握解題的科學程序；
- (2)掌握數學中常用的思維方法(如觀察、試驗、歸納、演繹、類比、分析、綜合、抽象、概括等)；
- (3)掌握解題的基本策略，能因題制宜地選擇適當的解題思路，使用有效的解題方法，運用精明的解題技巧；
- (4)具有敏銳的直覺。

三、**經驗題感**：解題具有實踐性與探索性的特徵，解題就像游泳、彈鋼琴與騎腳踏車一樣，只能透過模仿和實踐來學到它。你想學會游泳，就必須下水；你想成為解題高手，就必須去解題。弗里德曼曾說過：「解題不能教會，只能靠自己學會。」強調解題經驗(實踐)的原因是：

- (1)基礎知識要透過解題實踐來消化；
- (2)思維素質要透過解題實踐來優化；
- (3)解題方法要透過解題實踐來強化。

在解題實踐中，有時會成功、有時會失敗，這兩方面的經驗累積，都能形成長久保留價值或借鏡的經驗。所謂解題經驗就是某些數學經驗、某些解題方法與某些條件的組合。成功是一種有效的有序組合，失敗是一種無效的無序組合—不過它可從反面提供有效有序組合有用的資訊。成功經驗所獲得的有效有序組合，遇到合適的場所就可以套用上。

弗里德曼特別強調「在解題時不具備一般能力的基本原因在於沒有經常親自



動手進行分析，沒有從一般的運算方法及理論依據進行分析。」在解題中，一個人能避開歧路、繞過困難點、從眾多可能的途徑中迅速選出正確的一條途徑，的確是一定數學經驗調控的結果。解題成功就在於回憶他經驗中用得上的東西和他的解題思維聯繫起來。解題經驗的累積有利於解題念頭的誘發，有助於直覺性題感的形成。題感是世人們對問題整體的感受，它是思維變遷的一種潛在表現，而實質上是一種數學觀念、數學意識，常表現為整體把握及成功思路的預感、預測和預見。

**四、情感態度：**這裡主要是指良好的心理素質，如動機、興趣、抱負、態度、品德和意志等。這些非智力因素對於解題的作用與其對於發明、發現的作用是一樣的。

華羅庚曾說：「聰明在於學習，天才在於累積。」陳省身亦認為他對學數學的體會是「要用功，不用功什麼也談不上。」波利亞也曾說：「我認為解題是純粹的智能活動是錯誤的，決心與情緒所起的作用很重要。」他強調說：「教學生解題是意志的教育，當學生求解那些對他來說並不容易的題目時，他學會了敗而不餒，學會了讚賞微小的進展，學會等待主要念頭，學會了當主要念頭出現後全力以赴。如果學生在學校裡沒有機會嘗試為求解而產生的喜怒哀樂，那麼他的數學教育就在最重要的地方失敗了。」

## 陸、解題的觀點

### 1. 怎樣解題的解題觀 (波利亞)

- (a) 弄清問題
- (b) 擬定解題計畫
- (c) 實踐計畫
- (d) 回顧(或驗算所得的解)

### 2. 怎樣學會解數學題的解題觀 (弗里德曼)

- (a) 強調解題的實踐性和創造性
- (b) 解數學題就是要找到一種一般數學原理的序列
- (c) 解題過程的結構
- (d) 如何尋找解題方案

#### A. 波利亞的解題觀

##### (a) 弄清問題

- 未知數是什麼？已知數據是什麼？已知條件是什麼？
- 已知條件是否充分來解未知數(或不足、或多餘、或矛盾)？

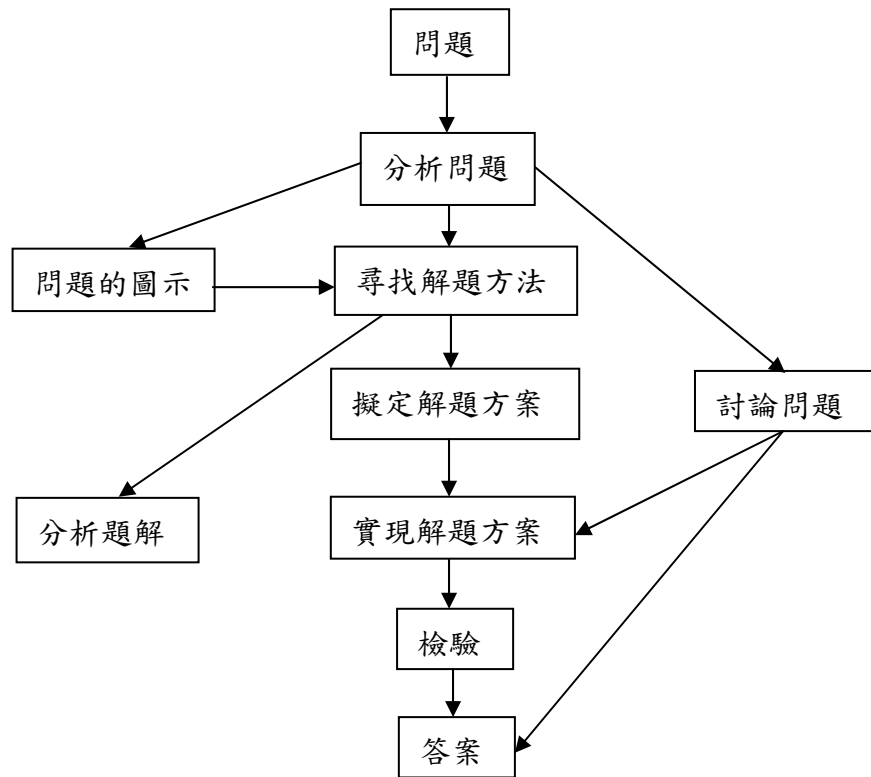
- 畫圖、引入適當的符號；
  - 把給定的條件個別分開，是否能把它寫出來？
- (b) 擬定解題計畫
- 找出已知數與未知數之間的關係；
  - 如果找不到直接的關係，可否找到有用的輔助問題；
  - 得到求解計畫
- (c) 實踐計畫
- 實踐個人求解計畫，檢驗每個步驟；
  - 清楚看出或證明步驟的正確性。
- (d) 回顧(含驗算所得的解)(這是練習解題最重要的步驟)
- 檢驗這個論證；
  - 可否用其他的方法導出這個結果？
  - 能不能一下看出它來？
  - 能否將此結果或方法用在其他的問題上？

## B. 弗里德曼的解題觀

- (a) 弗里德曼認為「學解答任何一道數學問題是不可能的，應當學會這樣一種對待數學問題的態度，即把數學問題看做是精密研究的對象，把解答數學問題看做是設計和發明的目標」，他又提出「解題是一種創造性的活動，而尋求解題是一個發明的過程。」這裡可以看出弗里德曼，強調了解題的實踐性和創造性。
- (b) 解答數學問題的實質是什麼？弗里德曼認為「解數學題就是要找到一種一般數學原理(定義、公理、定理、定律、公式)的序列，把這些原理用於數學問題的條件或者條件的推論(解題的中間結果)，得到數學問題所要的東西，即數學問題的答案。」例如：記  $x$  為條件， $y$  為答案，若存在數學原理  $f_1, f_2, \dots, f_n$  使得  $y = f_n f_{n-1} \cdots f_1(x)$ ，則  $f_1, f_2, \dots, f_n$  就是這道習題的原理序列， $f_k f_{k-1} \cdots f_1(x)$ ， $1 \leq k < n$  為中間結果或條件的推論。
- (c) 解題過程的結構：「如果把解題過程理解為開始得到數學問題到完全解決這道題的過程，那麼這個過程並不單是由敘述已經找到的題解所組成的，而是由一系列的階段所組成的；敘述題解只是其中的一個階段。」其全程可分為下列 8 個階段：

- 第一階段—分析問題；
- 第二階段—作問題的圖示；
- 第三階段—尋找解題方法；
- 第四階段—進行解題；
- 第五階段—檢驗題解；
- 第六階段—討論問題；

第七階段—陳述問題答案；  
第八階段—分析題解。



(d) 如何尋找解題方案呢？

- (1) 識別問題的類型—許多類型的問題都有解答它們的一般法則。
- (2) 歸結為已經解過的問題—蘇俄數學家雅諾夫斯卡姘有一次對數學奧林匹亞參賽者發表了《什麼叫做解題？》的演講，她的答案驚人的簡單，她認為「**解題就是把題目規結為已解過的題目**」。如果我們開始解一道題，分析的結果不能從中識別出類型，對於這這種類型的問題，我們不知道解它的一般法則，那麼我們應該怎麼辦呢？只有將它歸結於熟習的早已解過的問題(利用變換、改編或其他方法)。雖然雅諾夫斯卡姘的建議正確，也非常簡單，可是實際運用起來卻不那麼簡單，因為這種把不熟習的問題歸結為熟習的、已經解決的問題之作法來說，沒有一種確定的法則。但是若仔細地、深入地分析問題，認真地思考每一道已解答習題，記住尋找解題的所有方法，記住問題都是用什麼方法解出來的；那麼讀者一定會逐漸地獲得這種歸結的能力。

## 柒、解題的目的

數學解題的目的是什麼？有的學生回答是：**考試得分**；有的老師回答是：**鞏固知識**；更普遍的回答是：**求出答案**。從教學的角度看，這些回答都有不夠完整的地方，其實，求出答案僅僅是數學本身的目的。即使是數學家的研究工作，有時也不完全把找到答案作為目的。一個猜想尚未解決時，它刺激了數學方法的發明和數學分支的創立，其價值有時遠遠地超過了猜想的解決本身。所以當“四色問題”宣布被電腦解決時，有許多數學家深感惋惜；所以希爾伯特不情願殺掉那隻能為人類生出金雞蛋的母雞—費馬猜想(傳說希爾伯特證明了費馬猜想，而未發表)。事實上，作為數學教學中的問題，其答案都是現成的，教學參考書常有詳細的解答過程。波利亞不滿足於只給出現成的答案，才決心「教會年輕人去思考」，寫出怎樣解題表。因此，解出數學問題本身不是全部或最終的目的，而是一種訓練手段，這種訓練的目的主要有三條：

- 一、知識理解的鞏固性目的；
- 二、能力培養的發展性目的；
- 三、思想教育的陶冶性目的。

這些目的不是做幾道習題就能達到的，但每做一道習題都應該力求體認。這些目的之整個數學教學目的是一致的；因此，解題訓練要與基礎理論的學習結合起來，**將知識的應用過程與知識的發生過程融合於一體**。這種目的觀要求我們重視解題的思維過程，重視解題在發展學生的思維、培養學生的能力、促進學生良好品質結構方面的作用。在解題中，數學的精鍊、準確和嚴謹，有利於培養嚴密的邏輯思維能力；數學的抽象性可以培養學生的抽象思維能力；數學的廣泛應用可以培養學生將理論聯繫實際、分析問題和解決問題的能力。這一切又都有助於學生養成科學的思維習慣。

數學解題訓練有利於知識的理解和鞏固，有利於能力的培養和發展，但這兩種都還有更深一層的意義—把人類的思維潛能充分開發出來。所以說，數學是思維的體操；學習數學就是要是讓人變得更加聰明；解題訓練的就是開發數學智慧的過程。

當問題還沒有解出來時，我們能夠堅忍不拔、契而不捨；當答案已經找到時我們能從解題過程中吸收營養，並激發興趣進行新的探索：解題中用到哪些知識？它們是怎樣聯繫起來的？解題關鍵在哪裡？思路是怎樣打通的？推理是否嚴謹？思維有無多餘的迴路？還有別的解法嗎？還有更簡捷的解法嗎？這種解法能用於其它的問題嗎？這個問題能夠推廣嗎？改變一下條件如何？改變一下結論如何？當我們的思想以沈浸在無邊的探索時，我們就能從解題中獲得享受，並接受到數學文化的薰陶。

## 捌、參考解題訓練

以下是訓練國際數學奧林匹亞參賽學生的老師們，當他們給學生題目時常要求學生捫心自問(或可說是建議學生使用的解題策略)：

- 一、曾見過它嗎？是否遇見過相同的問題，但形式稍有不同？
- 二、你是否知道與此有關的問題？是否知道可能用得到的定理？
- 三、試著想出一個具有相同未知數(未知性質)或相似未知數(未知性質)的熟習的問題。
- 四、這裡有一個與你現在的問題有關且已解決的問題，你能不能利用它？你能利用它的結果嗎？你能利用它的方法嗎？你是否應該引入某些補助條件？
- 五、你能不能重新敘述這個問題？你能不能利用其它的方法重新敘述它？
- 六、回憶相關的數學定義。
- 七、如果不能直接解決此問題，可以解決一個與此相關的問題嗎？能不能想出一個與此相關的問題(類似的問題、較特殊的問題或更普遍的問題)？你能不能解決這個問題的一部份？
- 八、你能不能從已知數據(或條件)導出某些有用的東西？如果需要，你能不能改變未知數(或性質)或數據(或兩者均改變)，以使得新數據(或條件)與新未知數(或性質)更接近？
- 九、若僅僅保留條件的一部份，對於未知數據(或性質)能確定到什麼程度？它會怎樣變化？